2020-2021 学年高三数学一测理科评分参考

一、选择题（共 60 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	C	B	D	A	D	D	B	A	C	D	B

二、填空题(共 20 分)

13. 4；　　14. $(-\infty,2)$；　　15. 3；　　16. 84π .

三、解答题（共 70 分）

17. 解：（1）在 $\triangle ABC$ 中，因为 $b=\sqrt{5}, c=\sqrt{2}, \angle B=45^\circ$，

由余弦定理 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，…………………2 分

得 $5=2+a^2-2\times\sqrt{2}\times a\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，化简得 $a^2-2a-3=0$ ……………4 分

所以 $a=3$, 或 $a=-1$.（舍）………………6 分

（2）在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$,

得 $\frac{\sqrt{5}}{\sin 45^\circ}=\frac{\sqrt{2}}{\sin C}$, 所以 $\sin C=\frac{\sqrt{5}}{5}$ ………………… 8 分

在 $\triangle ADC$ 中，因为 $\cos\angle ADC=-\frac{4}{5}$, 所以 $\angle ADC$ 为钝角，

而 $\angle ADC+\angle C+\angle CAD=180^\circ$, 所以 $\angle C$ 为锐角.

故 $\cos C=\sqrt{1-\sin^2 C}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，　……………………10 分

因为 $\cos\angle ADC=-\frac{4}{5}$，所以 $\sin\angle ADC=\frac{3}{5}$. ……………………11 分

从而 $\sin\angle DAC=\sin(\angle ADC+\angle C)=\frac{2\sqrt{5}}{25}$ ………………12 分

18.（Ⅰ）证明：如图所示，取 AC 的中点 O，连接 BO，OD.

∵$\triangle ABC$ 是等边三角形，∴$OB\perp AC$. ……………………1 分

$\triangle ABD$ 与 $\triangle CBD$ 中，AB=BD=BC，$\angle ABD=\angle CBD$，∴$\triangle ABD\cong\triangle CBD$，∴$AD=CD$.

∵$\triangle ACD$ 是直角三角形，∴AC 是斜边，∴$\angle ADC=90^\circ$.

∴$DO=\frac{1}{2}AC$. ∴$DO^2+BO^2=AB^2=BD^2$. ∴$OB\perp OD$. ………………3 分

又 $DO\cap AC=O$，∴$OB\perp$ 平面 ACD……………4 分

又 $OB\subset$ 平面 ABC，∴平面 ABC $\perp$ 平面 ACD. ………………6 分

（Ⅱ）由题知，点 E 是 BD 的三等分点. 建立如图所示的空间直角坐标系. 不妨取 AB=2.

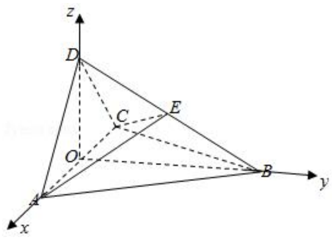
则 **O（0，0，0），A（1，0，0），C（−1，0，0），D（0，0，1），B（0，$\sqrt{3}$，0），E（0，$\frac{\sqrt{3}}{3}$,$\frac{2}{3}$）.**

$\overrightarrow{AD}=(-1,0,1)$，$\overrightarrow{AE}=\left(-1,\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{2}{3}\right)$，$\overrightarrow{AC}=(-2,0,0)$．……………8 分

设平面 ADE 的法向量为$\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$，则$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AD}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AE}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}-x_1+z_1=0\\ -x_1+\frac{\sqrt{3}}{3}y_1+\frac{2}{3}z_1=0\end{cases}$，

取$\vec{m}=(3,\sqrt{3},3)$．同理可得：平面 ACE 的法向量为$\vec{n}=(0,1,-\frac{\sqrt{3}}{2})$．………………10 分

$\therefore cos<\vec{m},\vec{n}>=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=-\frac{1}{7}$.



∴二面角 $\boldsymbol{D-AE-C}$ 的余弦值为$\frac{1}{7}$. ………………12 分

19.（Ⅰ）解：由题意可知$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$，$a^2=b^2+c^2$，

解得$a^2=6$，$b^2=3$，所以椭圆方程为$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$．　…………………4 分

（Ⅱ）证明：设点 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，因为 $AM\perp AN$，所以$\frac{y_1-1}{x_1-2}\cdot\frac{y_2-1}{x_2-2}=-1$，

所以$y_1y_2-(y_1+y_2)+1=-x_1x_2+2(x_1+x_2)-4$，①

当 k 存在的情况下，设 $MN:y=kx+m$，

联立$\begin{cases}y=kx+m,\\ x^2+2y^2=6\end{cases}$得$(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-6=0$，

由$\Delta>0$，得 $6k^2-m^2+3>0$，

由根与系数的关系得$x_1+x_2=-\frac{4km}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\frac{2m^2-6}{1+2k^2}$，　………………8 分

所以$y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2m=\frac{2m}{1+2k^2}$，$y_1y_2=k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=\frac{m^2-6k^2}{1+2k^2}$，

代入①式化简可得 $4k^2+8km+(m-1)(3m+1)=0$，

即$(2k+m-1)(2k+3m+1)=0$，所以 $m=1-2k$ 或 $m=-\frac{2k+1}{3}$,

所以直线方程为 $y=kx+1-2k$ 或 $y=kx-\frac{2k+1}{3}$,

所以直线过定点$(2,1)$或$(\frac{2}{3},-\frac{1}{3})$，又因为$(2,1)$和 A 点重合，故舍去，

所以直线过定点 $E(\frac{2}{3},-\frac{1}{3})$. ………………12 分

20. 解：（Ⅰ）$f(x)=xe^x-alnx-ax$, $x>0$，则

$f'(x)=(x+1)e^x-a\left(\frac{1}{x}+1\right)=(x+1)(e^x-\frac{a}{x})$.

当 $a=e$ 时，令$f'(x)<0$,得 $0<x<1$; 令$f'(x)>0$,得 $x>1$;

综上，当 $x\in(0,1)$时，$f(x)$单调递减；当 $x\in(1,+\infty)$时，$f(x)$单调递增. …………4 分

（Ⅱ）①当 $a<0$ 时，$f(x)$单调递增，$f(x)$的值域为 R，不符合题意；

当 $a=0$ 时，则 $\mathrm{f}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}<1$，也不符合题意.

当 $a>0$ 时，由（1）可知，$f(x)_{min}=a-alna$，故只需 $a-alna\geq 1$. ………… 8 分

令 $t=\frac{1}{a}$，上式即转化为 $\ln t\geqslant t-1$，

设 $h(t)=lnt-t+1$，则$h^{'}(t)=\frac{1-t}{t}$，

因此 $h(t)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减，

从而$h(x)_{max}=h(1)=0$，所以 $\ln t\leq t-1$.

因此，$\ln t=t-1\Rightarrow t=1$，从而有$\frac{1}{a}=t=1\Rightarrow a=1$.

故满足条件的实数为 $a=1$. ………………12 分

21.（Ⅰ）5 名优秀教师中的“甲”在每轮抽取中，被抽取到概率为$\frac{2}{5}$，则三次抽取中，“甲”恰有一次被抽取到的概率 P 为 P=$C_3^1\frac{2}{5}(\frac{3}{5})^2=\frac{54}{125}$ ………………4 分

（Ⅱ）第二次抽取到的没有支教经验的教师人数最有可能是 1 人.

设ω表示第一次抽取到的无支教经验的教师人数，ω可能的取值有 0,1,2，则有：

$P(\omega=0)=\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{1}{10}$；$P(\omega=1)=\frac{C_2^1C_3^1}{C_5^2}=\frac{6}{10}$；$P(\omega=2)=\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{3}{10}$.

设ξ表示第二次抽取到的无支教经验的教师人数，ξ可能的取值有 0,1,2，则有：

$P(\xi=0)=\frac{C_2^2}{C_5^2}\cdot\frac{C_2^2}{C_5^2}+\frac{C_2^1C_3^1}{C_5^2}\cdot\frac{C_3^2}{C_5^2}+\frac{C_3^2}{C_5^2}\cdot\frac{C_4^2}{C_5^2}=\frac{37}{100}$;

$P(\xi=1)=\frac{C_2^2}{C_5^2}\cdot\frac{C_2^1C_3^1}{C_5^2}+\frac{C_2^1C_3^1}{C_5^2}\cdot\frac{C_2^1C_3^1}{C_5^2}+\frac{C_3^2}{C_5^2}\cdot\frac{C_4^1C_1^1}{C_5^2}=\frac{54}{100}$;

$P(\xi=2)=\frac{C_2^2}{C_5^2}\cdot\frac{C_3^2}{C_5^2}+\frac{C_2^1C_3^1}{C_5^2}\cdot\frac{C_2^2}{C_5^2}+\frac{C_3^2}{C_5^2}\cdot 0=\frac{9}{100}$.

因为 $P(\xi=1)>P(\xi=0)>P(\xi=2)$，

故第二次抽取到的无支教经验的教师人数最有可能是 1 人. ……………8 分

(III)按照先 A 后 B 的顺序所需人数期望最小.

①设 X 表示先 A 后 B 完成任务所需人员数目，则

X	1	2
P	P_1	$(1-P_1)$

$\mathrm{E(X)}=P_1+2(1-P_1)=2-P_1$

①设 Y 表示先 B 后 A 完成任务所需人员数目，则

Y	1	2

P	P_2	$(1-P_2)$

$E(Y)=P_2+2(1-P_2)=2-P_2$，$E(Y)-E(X)=P_1-P_2>0$.

故按照先 A 后 B 的顺序所需人数期望最小. ………………12 分

22. 解：（Ⅰ）由$\begin{cases}x=\cos\theta,\\ y=1+\sin\theta,\end{cases}$可得$x^2+(y-1)^2=cos^2\theta+sin^2\theta=1$，

所以曲线 C 的普通方程为$x^2+(y-1)^2=1$，

由$\rho\,sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$，可得$\rho\left(\frac{\sqrt{3}}{2}sin\theta+\frac{1}{2}cos\theta\right)=\sqrt{3}$，所以$\frac{\sqrt{3}}{2}\rho sin\theta+\frac{1}{2}\rho cos\theta-\sqrt{3}=0$，

所以直线 l 的直角坐标方程为 $x+\sqrt{3}y-2\sqrt{3}=0$. ………………5 分

（Ⅱ）曲线 C 的方程可化为$x^2+y^2-2y=0$，所以曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=2\sin\theta$，

由题意设 $A\left(\rho_1,\frac{\pi}{6}\right)$,$B\left(\rho_2,\frac{\pi}{6}\right)$，将$\theta=\frac{\pi}{6}$代入 $\rho=2\sin\theta$，可得 $\rho_1=1$

将$\theta=\frac{\pi}{6}$代入$\rho\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$，可得$\rho_2=2$, 所以$|AB|=|\rho_1-\rho_2|=1$ ……………10 分

23. （Ⅰ）依题意，得 $f(x)=|x+4|$, 则$|x+4|>2$, 解得 $x>-2$ 或 $x<-6$.

故不等式 $f(x)>2$ 的解集为｛x ｜ $x>-2$ 或 $x<-6$｝………………5 分

（Ⅱ）依题意，$f(x)+|x-a^2|\geq 4\Leftrightarrow\left|x+\frac{1}{b(a-b)}\right|+|x-a^2|\geq 4$

因为$\left|x+\frac{1}{b(a-b)}\right|+|x-a^2|\geq\left|x+\frac{1}{b(a-b)}-(x-a^2)\right|=a^2+\frac{1}{b(a-b)}$

$a=b+a-b\geq 2\sqrt{b(a-b)}$, 故$\frac{1}{b(a-b)}\geq\frac{4}{a^2}$

故$a^2+\frac{1}{b(a-b)}\geq a^2+\frac{4}{a^2}\geq 4$，当且仅当 $a=\sqrt{2}, b=\frac{\sqrt{2}}{2}$时，等号成立………10 分